



Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Ciências Integradas do Pontal

FACIP

APOSTILA DE MATEMÁTICA

**Matemática para Administração
e Ciências Contábeis**

por

Germano Abud de Rezende
Wallisom Rosa

CAPÍTULO 1

Introdução

Neste capítulo faremos uma revisão de algumas funções usuais, gráficos e suas aplicações na área administrativa.

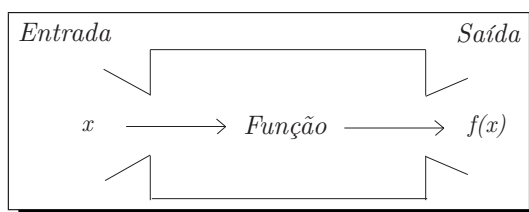
1.1 Funções Reais: Conceito e Notação

Seja $D \subset \mathbb{R}$ um subconjunto não-vazio dos números reais.

Uma função f de D em \mathbb{R} é uma correspondência que associa **a cada** elemento x de D um **único** número, que denotaremos por $f(x)$, em \mathbb{R} . Em resumo:

$$\begin{aligned} f : D &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Podemos pensar em uma função como uma máquina que recebe como matéria-prima os elementos x de D , os processa e devolve na saída números reais do tipo $f(x)$. É o que está ilustrado a seguir:



O número x é também chamado *variável independente* (ou simplesmente *variável*). O conjunto D , formado por todas as entradas possíveis, é chamado *domínio* de f .

$$D = \{x \in \mathbb{R} / \exists f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

$f(x)$ é chamado *imagem* de x por f . O conjunto formado pelos números $f(x)$ com $x \in D$, dado por

$$\{f(x) / x \in D\}$$

é chamado de conjunto *imagem* de f . A notação para o conjunto imagem é $Im(f)$. Assim,

$$Im(f) = \{f(x) / x \in D\}.$$

Os pontos onde a função intersecta o eixo x são chamados de *zeros* ou *raízes*. Eles são as soluções da equação $y = f(x) = 0$.

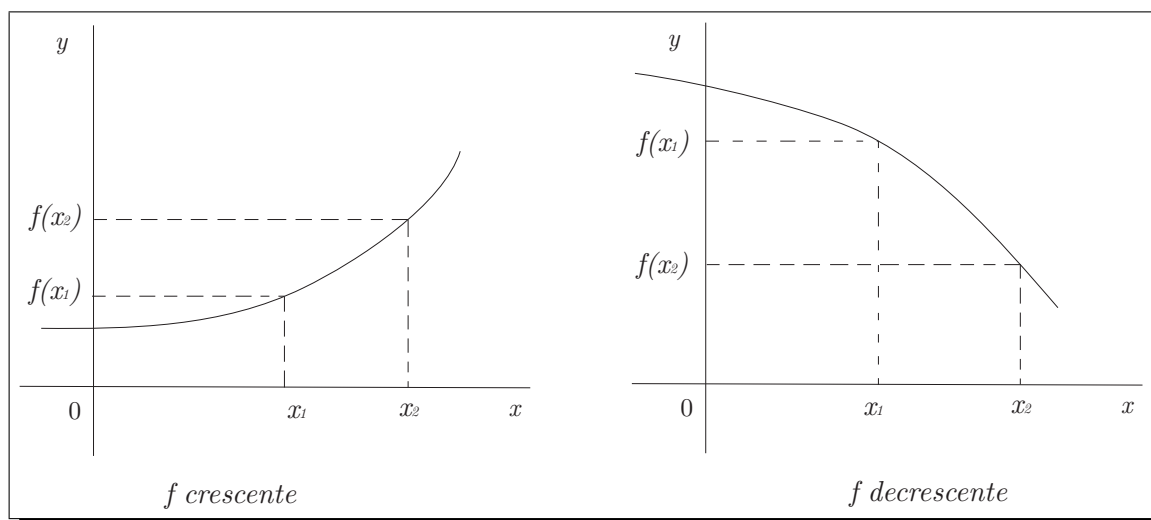
1.1.1 Crescimento e Decrescimento de Funções

Uma função f é *crecente* em um intervalo I se

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ sempre que } x_1 < x_2 \text{ em } I.$$

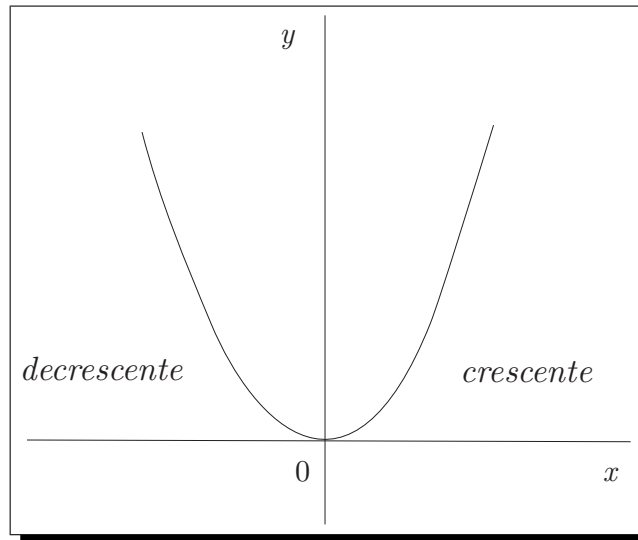
f é *decrescente* em I se

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ sempre que } x_1 < x_2 \text{ em } I.$$



Nestas definições é importante salientar que, por exemplo, uma função é crescente em um intervalo I se a desigualdade $f(x_1) < f(x_2)$ se mantém para *quaisquer* x_1 e x_2 em I com $x_1 < x_2$.

Por exemplo, pelo gráfico de $f(x) = x^2$, podemos observar que esta é decrescente em $(-\infty, 0]$ e crescente em $[0, \infty)$.



1.2 Funções Usuais

Função Constante

A função constante é dada por $f(x) = K$; com $K \in \mathbb{R}$. Seu gráfico é uma reta paralela ao eixo das abcissas (*eixo x*). Sua Imagem possui um único valor $Im(f) = K$.

EXEMPLOS

- 1) Faça um esboço do gráfico das funções $f(x) = 2$ e $g(x) = -1$.
- 2) Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Função do 1º grau

A função do primeiro grau é dada por $f(x) = ax + b$; com $a \neq 0$. Seu gráfico é uma reta. No caso em que $b = 0$ a função é dita função linear e quando $b \neq 0$ é dita função afim. Se queremos determinar a equação de uma reta por dois pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) podemos fazer uso da fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$; onde o coeficiente angular da reta é dado por $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$.

EXEMPLOS

- 1) Faça um esboço do gráfico das funções $f(x) = 2x - 6$ e $g(x) = x - 3$.
- 2) Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = -3x + 9$.
- 3) Determine a equação da reta que passa pelos pontos $(1, 2)$ e $(3, -1)$.
- 4) Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = 3x$.

Função do 2º grau

A função do segundo grau é dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$; com $a \neq 0$. Seu gráfico é uma parábola. No caso em que $a > 0$ a parábola tem concavidade para cima e quando $a < 0$ a parábola tem concavidade para baixo. Se queremos esboçar o gráfico de uma parábola devemos encontrar suas raízes e seu vértice. Para o cálculo das raízes ($f(x) = 0$) fazemos uso da fórmula de Báskara $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$. No caso em que $\Delta > 0$ as raízes são distintas; se $\Delta < 0$ não existem raízes reais (a parábola não corta o eixo x) e se $\Delta = 0$ as raízes são iguais (a parábola toca o eixo x em um único ponto). O ponto onde a parábola corta o eixo y é obtido fazendo-se $x = 0$. As coordenadas do vértice podem ser calculadas através das fórmulas $x_V = \frac{-b}{2a}$ e $y_V = \frac{-\Delta}{4a}$.

EXEMPLOS

- 1) Faça um esboço do gráfico das funções $f(x) = x^2 - 2x + 1$ e $g(x) = 2x^2 - 4x + 2$.
- 2) Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = x^2 + 3$.
- 3) Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = x^2 - 5$.
- 4) Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = -2x^2 + 3x$.

Função Polinomial

Uma função P é chamada um *polinômio* (ou *função polinomial*) se é da forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

onde n é um inteiro não negativo. Os números $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ são constantes chamadas *coeficientes* do polinômio. O *grau* de P é o maior inteiro n tal que $a_n \neq 0$ e o grau de $P(x) = 0$ (chamado de *polinômio nulo*) é zero.

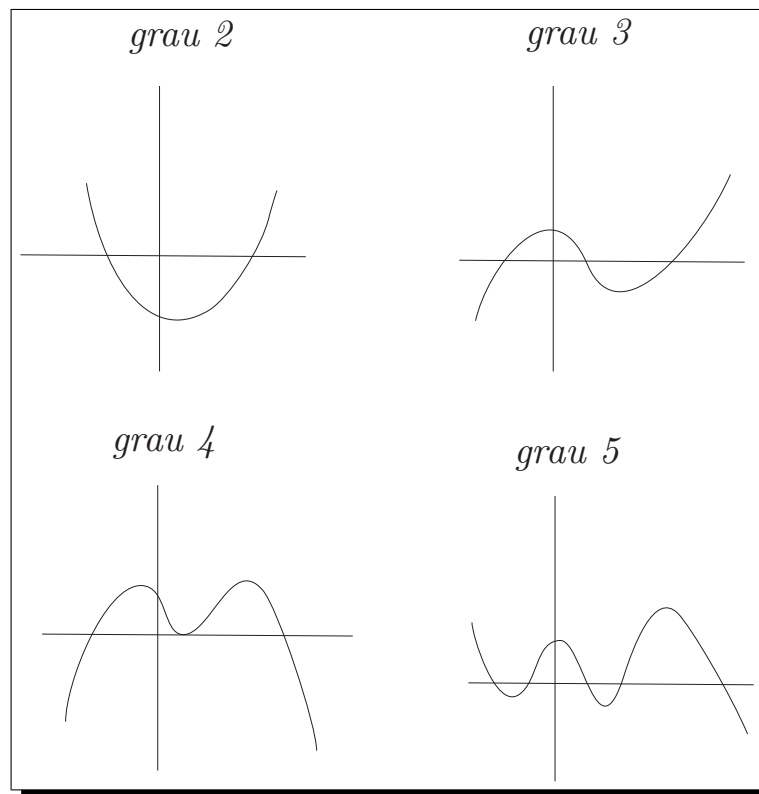
O domínio de qualquer polinômio é \mathbb{R} .

Por exemplo, a função

$$P(x) = 7x^5 + \sqrt{3}x^3 + \pi x^2 - x + \frac{1}{3}$$

é um polinômio de grau 5.

Na figura abaixo ilustramos algumas possibilidades para os gráficos de polinômios de graus 2, 3, 4 e 5.



Função Racional

Uma *função racional* f é o quociente de dois polinômios. Isto é,

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

onde P e Q são polinômios. O domínio consiste de todos os valores de x tais que $Q(x) \neq 0$. Um exemplo já conhecido de função racional é a função $f(x) = \frac{1}{x}$ que associa a cada número real não nulo seu inverso multiplicativo. Seu domínio é $\mathbb{R} - \{0\}$. A função

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 1}$$

é uma função racional cujo domínio é $\{x \in \mathbb{R} / x \neq 1\}$.

Função Algébrica

Uma função f é uma *função algébrica* se puder ser construída a partir de um número finito de operações algébricas (tais como adição, multiplicação, extração de raízes) começando com polinômios. Em particular, toda função racional é uma função algébrica. Alguns exemplos:

$$f(x) = \sqrt{x^3 + 1} \quad e \quad g(x) = \frac{x^4 - 16x^2}{x + \sqrt{x}} + x^{\frac{1}{3}}.$$

O gráfico de uma função algébrica, como veremos mais adiante, pode assumir uma variedade de formas.

EXEMPLOS

1) Encontre o domínio das seguintes funções:

- a) $g(x) = \sqrt{x - 5}$;
- b) $h(x) = \sqrt[3]{3x - 6 + x^2}$;
- c) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$;
- d) $u(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x - 1}$.

Função exponencial

A função exponencial (na base e , onde $e \approx 2,71828$.) é dada por $f(x) = e^x$. Seu gráfico é uma curva crescente, com concavidade para cima. Ele corta o eixo y no ponto $(0, 1)$ pois $e^0 = 1$ e não corta o eixo x pois a equação $e^x = 0$ não tem solução.

EXEMPLOS

1) Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = e^x$.

- 2) Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = 3e^x$.
- 3) Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = e^{2x}$.
- 4) Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = e^{x-2}$.

Função logarítmica

A função logarítmica (na base e) é dada por $f(x) = \ln(x)$ (logaritmo natural ou neperiano). Temos que:

$$\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x$$

Seu gráfico é uma curva crescente com concavidade para baixo. Ele corta o eixo x no ponto $(1, 0)$ pois $\ln 1 = 0$ e não corta o eixo y pois o domínio desta função é $\{x \in \mathbb{R}/x > 0\}$.

EXEMPLOS

- 1) Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = \ln(x)$.
- 2) Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = \ln(2x)$.
- 3) Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = 2\ln(x)$.
- 4) Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = \ln(x - 2)$.

Função modular (ou Valor Absoluto)

A função modular (valor absoluto) é dada por $f(x) = |x|$. Seu gráfico tem o formato da letra V. Ele tangencia o eixo x no ponto $(0, 0)$ pois $|0| = 0$ e só assume valores positivos ($y \geq 0$) pois $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Por definição, temos que:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

EXEMPLOS

- 1) Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = |x|$.
- 2) Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = |x - 1|$.
- 3) Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = |x| + 1$.

1.2.1 Funções Definidas por Sentenças

Algumas vezes precisamos utilizar mais de uma expressão para definir o valor de $f(x)$ de acordo com o valor que x assume. Fizemos isso ao definir a função modular:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0; \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Esse tipo de função, definida por fórmulas diversas em diferentes partes do seu domínio, é chamada de *função definida por sentenças* ou *por partes*.

Para desenhar o gráfico de uma função definida por sentenças basta desenhar o gráfico da expressão que ela assume em cada intervalo. Vejamos um exemplo:

EXEMPLOS

- 1) Seja a função definida pelas sentenças

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{se } x \leq 1; \\ x^2, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Desenhe o seu gráfico.

- 2) Seja a função definida pelas sentenças

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{se } x \leq 1; \\ x^2 - 1, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Desenhe o seu gráfico.

1.3 Função Composta e Função Inversa

Faremos uma breve revisão de duas importantes operações entre funções, a composição de funções e a inversão de funções.

1.3.1 Função Composta

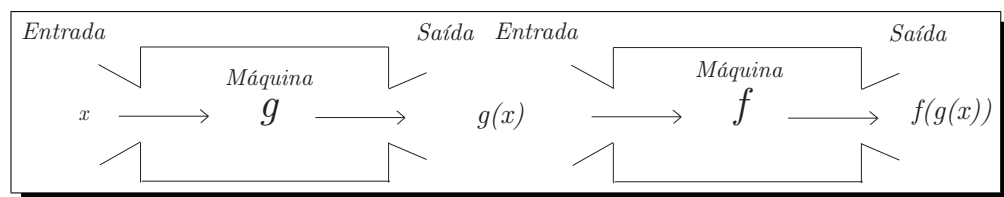
Vamos supor que y seja função de uma variável u , digamos $y = 2u - 3$, e que u seja função da variável x , digamos $u = x^2$. Então podemos imaginar y como função de x e sua expressão como função de x é obtida substituindo o valor de u (em função de x) na expressão de y :

$$y = 2u - 3 = 2x^2 - 3$$

Em geral, se $y = f(u)$ e $u = g(x)$ e os valores assumidos por u (imagem de g) estão dentro do domínio de f então podemos obter uma nova função h , dita *função composta* de f com g , denotada por

$$y = h(x) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$$

A composição de funções não é uma operação comutativa, ou seja, em geral $(f \circ g) \neq (g \circ f)$. O diagrama abaixo explica o funcionamento da composição $f \circ g$:



EXEMPLOS

1) Considere as funções $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$, $g(x) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$ e $h(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$.

Determine, **se possível**:

- $f(g(x)), g(f(x))$ e seus domínios;
- $f(h(x)), h(f(x))$ e seus domínios;
- $g(h(x)), h(g(x))$ e seus domínios;
- $f(g(h(x)))$ e seu domínio.

1.3.2 Função Inversa

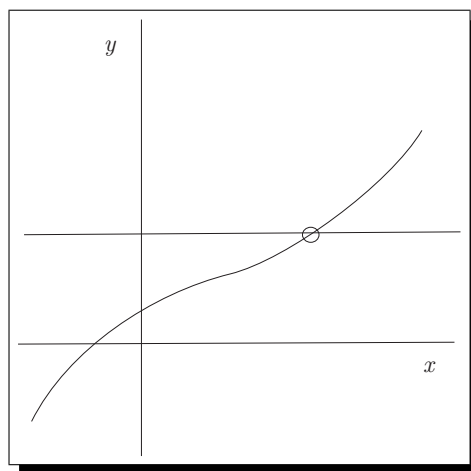
Uma função f é chamada *um a um* (ou *injetora*) se nunca assume o mesmo valor duas vezes, isto é,

$$f(x_1) \neq f(x_2) \text{ sempre que } x_1 \neq x_2.$$

Por exemplo, a função $f(x) = x^3$ é um a um pois se $x_1 \neq x_2$ então $x_1^3 \neq x_2^3$ (dois números diferentes não podem ter o mesmo cubo!).

Porém, a função $f(x) = x^2$ não é um a um pois, por exemplo, se $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$ então $x_1 \neq x_2$ e, no entanto, $f(x_1) = 1 = f(x_2)$.

Se conhecemos o gráfico de uma dada função f , para sabermos se ela é injetora basta verificar se toda reta horizontal intercepta seu gráfico em apenas um ponto. Ou seja, uma função é um a um se toda reta vertical intercepta seu gráfico uma única vez (Veja a figura).



Diremos que uma função $f : A \rightarrow B$ é *sobrejetora* se $Im(f) = B$. Lembramos que esta igualdade é entre dois subconjuntos de \mathbb{R} , isto é,

$$Im(f) = B \text{ se, e somente se, } Im(f) \subset B \text{ e } B \subset Im(f).$$

Como a inclusão $Im(f) \subset B$ é sempre satisfeita então, para verificar que uma dada função é sobrejetora basta verificar se $B \subset Im(f)$. Uma função $f : A \rightarrow B$ é *invertível* (ou *bijetora*) se é injetora e sobrejetora. Em particular, se $B = Im(f)$ então f é invertível se é um a um. Também diremos, se f é invertível, que f possui uma *inversa*, a qual chamaremos de f^{-1} , que está definida em B e assume valores em A , ou seja, $f^{-1} : B \rightarrow A$, e é definida por

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

para todo $y \in B$.

Esta definição estabelece: se f transforma x em y , então f^{-1} transforma de volta y em x . Daí a necessidade de f ser um a um pois, caso contrário, f^{-1} não seria uma função. Note que:

$$\text{Domínio de } f = Im(f^{-1})$$

Domínio de $f^{-1} = Im(f)$.

Por exemplo, a função inversa de $f(x) = x^3$ é $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$ pois se $y = x^3$, então

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(x^3) = (x^3)^{\frac{1}{3}} = x.$$

Observação 1.1. Não confundir o -1 de f^{-1} com um expoente. Assim,

$$f^{-1}(x) \text{ não significa } \frac{1}{f(x)}!$$

COMO ACHAR A INVERSA DE UMA FUNÇÃO INVERTÍVEL f :

Passo 1. Escreva $y = f(x)$;

Passo 2. Resolva essa equação para x em termos de y (se possível);

Passo 3. Para expressar f^{-1} como uma função de x , troque x por y . A equação resultante é $y = f^{-1}(x)$.

Vale também:

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x \text{ para todo } x \text{ no domínio de } f, \\ \text{e } f(f^{-1}(x)) &= x \text{ para todo } x \text{ no domínio de } f^{-1}. \end{aligned}$$

Por exemplo, se quisermos encontrar uma função inversa para

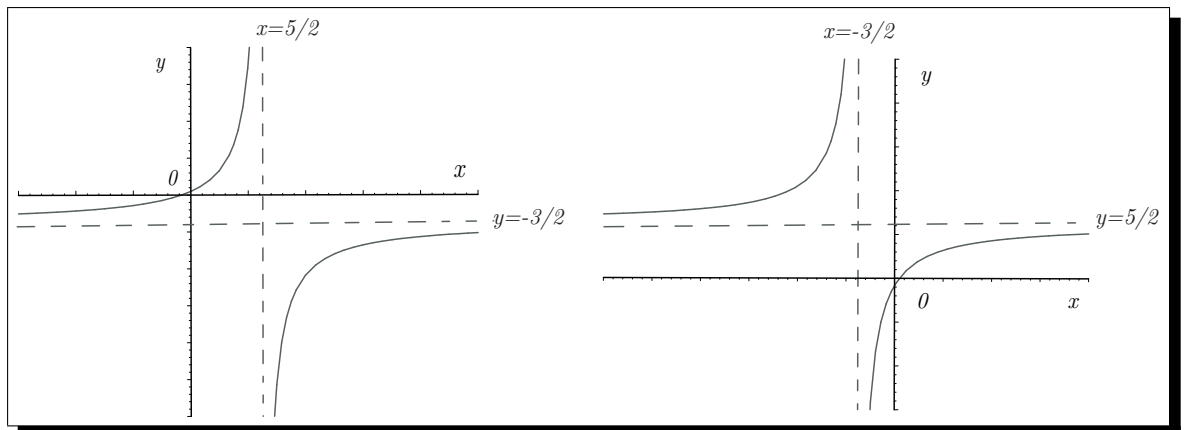
$$f(x) = \frac{1 + 3x}{5 - 2x},$$

de acordo com os passos acima temos, para todo $x \neq 5/2$:

$$\begin{aligned} y = \frac{1 + 3x}{5 - 2x} &\Leftrightarrow 5y - 2xy = 1 + 3x \\ &\Leftrightarrow 2xy + 3x = 5y - 1 \\ &\Leftrightarrow x(2y + 3) = 5y - 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{5y - 1}{2y + 3}. \end{aligned}$$

Finalmente, $f^{-1}(x) = \frac{5x-1}{2x+3}$.

Observe que o domínio de f é $\mathbb{R} - \{\frac{5}{2}\}$, que é exatamente o conjunto imagem de f^{-1} . Assim como $\mathbb{R} - \{-\frac{3}{2}\}$ é o domínio de f^{-1} e a imagem de f . A seguir temos o gráfico de f e de f^{-1} .



EXEMPLOS

1) Determine, **se possível** as inversas (e seus respectivos domínios) das seguintes funções:

- a) $f(x) = \ln(x)$;
- b) $g(x) = x^2 - 2x + 1$;
- c) $h(x) = x^2, x \geq 0$;
- d) $u(x) = \frac{1}{x}$.

1.4 Demanda e Oferta de Mercado

A *demanda de mercado* de uma certa utilidade (bem ou serviço) é a soma das quantidades que todos os consumidores estão dispostos a adquirir ao preço P . Assim podemos relacionar a demanda com o preço através uma função dita *função demanda de mercado*. Em geral, à medida que o preço aumenta a demanda tende a diminuir, logo a função demanda é decrescente.

EXEMPLOS

- 1) Suponha que a demanda de mercado de uma certa utilidade é dada, em função do preço, por $D = -5P + 12$. Esboce o gráfico da função demanda. Determine os intervalos de variação do preço e da demanda.
- 2) Suponha que a demanda de mercado de uma certa utilidade é dada, em função do preço, por $D = -2P^2 + 12P$. Esboce o gráfico da função demanda. Determine os intervalos de variação do preço e da demanda.
- 3) Suponha que a demanda de mercado de uma certa utilidade é dada, em função do preço, por $D = -P^2 + P + 12$. Esboce o gráfico da função demanda. Determine os intervalos de variação do preço e da demanda.

A *oferta de mercado* de uma certa utilidade (bem ou serviço) é a soma das quantidades que todos os produtores estão dispostos a oferecer ao preço P . Assim podemos relacionar a oferta com o preço através uma função dita *função oferta de mercado*. Em geral, à medida que o preço aumenta, a oferta tende a aumentar, logo a função oferta é crescente.

EXEMPLOS

- 1) Suponha que a oferta de mercado de uma certa utilidade é dada, em função do preço, por $S = 4P - 12$ para $P \leq 7$. Esboce o gráfico da função oferta. Determine os intervalos de variação do preço e da oferta.
- 2) Suponha que a oferta de mercado de uma certa utilidade é dada, em função do preço, por $S = P^2 - 4P$ para $P \leq 10$. Esboce o gráfico da função oferta. Determine os intervalos de variação do preço e da oferta.

- 3) Suponha que a oferta de mercado de uma certa utilidade é dada, em função do preço, por $S = 2P^2 - 32$ para $P \leq 8$. Esboce o gráfico da função oferta. Determine os intervalos de variação do preço e da oferta.

1.4.1 Ponto de Equilíbrio

O preço para o qual a demanda é igual a oferta é dito *preço de equilíbrio* (P.E.) e quantidade para a qual isto ocorre é dita *quantidade de equilíbrio* (Q.E.). Graficamente, o ponto de equilíbrio (P.E.,Q.E.) é o ponto onde os gráficos da demanda e da oferta se intersectam.

EXEMPLOS

- 1) Suponha que a oferta de mercado de uma certa utilidade é dada, em função do preço, por $S = 4P - 12$ e que a demanda de mercado de uma certa utilidade é dada, em função do preço, por $D = -5P + 12$. Esboce os gráficos das funções, destacando o ponto de equilíbrio.
- 2) Suponha que a oferta de mercado de uma certa utilidade é dada, em função do preço, por $S = P^2 - 4P$ e que a demanda de mercado de uma certa utilidade é dada, em função do preço, por $D = -2P + 10$. Esboce os gráficos das funções, destacando o ponto de equilíbrio.